Bull. Sci. math. 127 (2003) 719–737
BULLETIN DES SCIENCES MATHEMATIQUES
www.elsevier.com/locate/bulsci

Estimations anisotropes dans les convexes de type fini

Anne Cumenge, Mathieu Fructus

Laboratoire Emile Picard-UMR 5580, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 24 mai 2003 ; accepté le 2 juillet 2003

Résumé

Soit Ω un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse de type fini m. Nous montrons que l'équation $\bar\partial u = f$ où f est une $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée, admet une solution u appartenant à l'espace de Hölder $\Lambda^1(\Omega)$ lorsque la norme anisotrope $|||f|||_{\kappa,\Omega}$ – introduite par Bruna–Charpentier–Dupain – est finie, à l'espace anisotrope $\Gamma^\alpha_{(\rho)}$ de McNeal–Stein, pour tout $\alpha,\ 0<\alpha<1/m$, lorsque f est à coefficients bornés en norme euclidienne.

Abstract

Let Ω be a smoothly bounded convex domain of finite type m and f be a $(0,1)$-form $\bar\partial$-closed in Ω. It is proved that the equation $\bar\partial u = f$ admits a solution u belonging to the space $\Lambda^1(\Omega)$ (respectively to the anisotropic space $\Gamma^\alpha_{(\rho)}$ of McNeal–Stein, for all $\alpha,\ 0<\alpha<1/m$) if the anisotropic norm – introduced by Bruna–Charpentier–Dupain – $|||f|||_{\kappa,\Omega}$ is finite (respectively if the Euclidian norm $\|f\|_\infty$ of the form f is finite).

Mots-clés : Équation de Cauchy–Riemann ; Type fini ; Espaces de Hölder

Keywords: Cauchy–Riemann equation; Finite type; Hölder spaces

1. Introduction

Les estimations höldériennes optimales pour l'équation de Cauchy–Riemann ont été obtenues depuis longtemps dans le cas des strictement pseudoconvexes [6], et plus récemment dans le cas des convexes de type fini [2,4]. De plus, S.G. Krantz a montré

Adresses e-mail : cumenge@picard.ups-tlse.fr (A. Cumenge), fructus@picard.ups-tlse.fr (M. Fructus).

0007-4497/$ – see front matter
doi:10.1016/S0007-4497(03)00061-7

pour la solution de Henkin de $\bar\partial u = f$ avec donnée f à coefficients bornés, l'appartenance à l'espace anisotrope $\Lambda^{1/2,\tilde{\tilde{1}}}$ dans les strictement pseudoconvexes. Ce résultat a ensuite été amélioré par Greiner et Stein [5] qui ont obtenu sous les mêmes hypothèses une solution dans $\Lambda^{1/2,1}$.

Nous donnons dans cet article des résultats avec estimations lipschitziennes anisotropes pour l'équation $\bar\partial$, dans un domaine convexe borné de type fini m, affinant ainsi l'estimation isotrope $\|Tf\|_{\Lambda^{1/m}} \lesssim \|f\|_{L^\infty}$ obtenue dans [2,4]. (T est l'un des opérateurs résolvant le $\bar\partial$ construits dans les deux articles précités.)

Dans [1], les auteurs ont introduit la norme ponctuelle $\|f(z)\|_\kappa$ pour les formes (définie à partir d'une norme de type Kobayashi pour les vecteurs). Nous montrons tout d'abord que pour une donnée f $\bar\partial$-fermée, dont la norme $|||f|||_\kappa := \sup_{z\in\Omega} \|f(z)\|_\kappa$ est bornée, l'équation $\bar\partial u = f$ admet une solution u qui est dans l'espace de Hölder Λ^1 :

Théorème 1. *Soit Ω un domaine convexe borné à bord lisse de type fini m, et f une* $(0,1)$-*forme $\bar\partial$ fermée telle que $|||f|||_\kappa < +\infty$, alors il existe $u \in \Lambda^1(\Omega)$ telle que $\bar\partial u = f$.*

Supposant ensuite que la donnée est bornée en norme euclidienne, nous obtenons une solution de $\bar\partial u = f$ dans l'espace de Lipschitz anisotrope $\Gamma^\alpha_{(\rho)}$ défini par McNeal et Stein [9] en utilisant la pseudodistance ρ de McNeal pour les convexes de type fini :

Théorème 2. *Soit Ω un domaine convexe borné à bord lisse de type fini m, et f une* $(0,1)$-*forme $\bar\partial$-fermée telle que $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$ alors, pour tout $0 < \alpha < 1/m$, il existe $u \in \Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$ telle que $\bar\partial u = f$.*

Remarques. (1) En fait nous montrons l'existence d'un opérateur intégral T tel que : $\bar\partial Tf = f$ pour f $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée à coefficients bornés dans Ω, T est continu de $L^\infty_{(0,1),\|\cdot\|_{\mathrm{eucl}}}(\Omega)$ dans $\Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1/m$, et de $L^\infty_{(0,1),\|\cdot\|_\kappa}(\Omega)$ dans $\Lambda^1(\Omega)$.

(2) Le projecteur de Bergman de Ω étant continu de l'espace $\Lambda^1(\Omega)$ dans lui-même et également de tout espace $\Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$ dans lui-même d'après [9], la solution canonique v de Kohn de l'équation $\bar\partial u = f$ dans Ω satisfait les mêmes estimations que celles données ici pour $u = Tf$.

Dans une première partie, nous ferons des rappels de définitions et de résultats relatifs aux convexes de type fini et nous préciserons le noyau résolvant utilisé. Les Théorèmes 1 et 2 seront démontrés respectivement en deuxième et troisième parties de l'article.

2. Notations. Estimations de base

2.1. Polydisques de McNeal

Nous supposerons que la construction des polydisques de McNeal est déjà connue. Le lecteur pourra consulter [1] ou [8] pour avoir les détails de cette construction. Nous fixons les notations et rappelons quelques définitions et estimations.

– $d(z) := \mathrm{dist}(z, b\Omega)$ et $\delta(\zeta) := \mathrm{dist}(\zeta, b\Omega)$.
– r est une fonction définissante choisie comme dans [1], $\Omega = \{z \mid r(z) < 0\}$.
– $P(z,\varepsilon)$ est le polydisque de McNeal centré en z et de rayon ε. Si $P(z,\varepsilon) \cap P(\zeta,\varepsilon) \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Vol}\, P(z,\varepsilon) \approx \mathrm{Vol}\, P(\zeta,\varepsilon)$.
– Pour un vecteur unitaire $v \in \mathbb{C}^n$, $\sigma(z,v,\varepsilon) = \sup\{t > 0\colon r(z+\lambda v) - r(z) \leqslant \varepsilon,\ |\lambda| \leqslant t\}$. Rappelons que :

$$\varepsilon \lesssim \sigma(z,v,\varepsilon) \lesssim \varepsilon^{1/m} \quad \text{et} \quad \text{si } \zeta \in P(z,\varepsilon), \quad \text{alors } \sigma(z,v,\varepsilon) \approx \sigma(\zeta,v,\varepsilon). \tag{2.1}$$

Si $(v_i(z,\varepsilon))_i$ est une ε-base extrémale en z, comme définie dans [1], alors :

$$\mathrm{Vol}\, P(z,\varepsilon) \approx \prod_{i=1}^{n} \bigl(\sigma\bigl(z, v_i(z,\varepsilon), \varepsilon\bigr)\bigr)^2. \tag{2.2}$$

– $\mathcal{M}(z,\zeta) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ t.q. } \zeta \in P(z,\varepsilon)\}$ (pseudodistance « près du bord »).
– $\rho(\zeta,z) = \min\{|\zeta - z|;\ \mathcal{N}(\zeta,z)\}$, où $\mathcal{N}(\zeta,z) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ t.q. } \zeta, z \in P(\pi(z),\varepsilon)\}$.
Pour un $z \in \Omega$ fixé on notera de plus :
– $\mathcal{C}^0 = \{\zeta \in \Omega \cap \mathcal{U} \text{ t.q. } \mathcal{M}(z,\zeta) < d(z)\}$ et $\mathcal{C}^\ell = \{\zeta \in \Omega \cap \mathcal{U} \mid 2^{\ell-1} d(z) \leqslant \mathcal{M}(z,\zeta) < 2^\ell d(z)\}$ avec $\ell \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{U}$ est l'un des ouverts définis ci-dessous (Section 2.3) contenant z.

2.2. *Noyau résolvant*

On notera $\mathcal{B}(\zeta,z)$ le noyau de Bergman, holomorphe en la seconde variable.
Le noyau résolvant le $\bar\partial$ que nous considérons s'écrit :

$$\begin{aligned} K(\zeta,z) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta,z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^{N-k} \frac{\partial_\zeta |\zeta - z|^2 \wedge (\bar\partial_\zeta \widetilde{Q})^k \wedge (\mathrm{d}\partial_\zeta |\zeta - z|^2)^{n-k-1}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \\ &:= \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} K^{(k)}(\zeta,z), \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $N \in \mathbb{N}$, N suffisamment grand ($N > 3n + 2$ par exemple)

$$c_{k,n} = (-1)^{n(n-1)/2+1} \binom{N}{k} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}(\zeta,z)$$
$$= \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)} \int_0^1 (1-t)^{-1} \partial_\zeta \bigl(\mathcal{B}\bigl(\zeta, \zeta + t(z-\zeta)\bigr)\bigr)\, \mathrm{d}t.$$

Pour f $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée à coefficients bornés dans Ω, $\bar\partial T f = f$, où $Tf(z) = \int_\Omega f(\zeta) K(\zeta,z)$ (cf. [3]). En fait l'expression considérée dans [3] pour $\mathcal{B}(\zeta,\zeta)\widetilde{Q}$ est $\int_0^1 t^{-1} \partial_z (\mathcal{B}(\zeta, \zeta + t(z-\zeta))\, \mathrm{d}t$ et l'équation $\bar\partial u = f$ y est résolue pour f $(n,1)$-forme ; le choix légèrement différent effectué ici donne de manière strictement analogue une solution de l'équation $\bar\partial u = f$ pour les $(0,1)$-formes et est sans incidence sur la preuve d'estimations de [3] que nous utiliserons.

De plus, on notera $u^{(k)}(z) := \int_\Omega f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta,z)$. On gardera éventuellement cette même notation si on intègre sur $\mathcal{C}^\ell$ et non sur Ω tout entier.

2.3. Rappels d'estimations

Dans la suite, on utilisera très souvent les estimations suivantes, dues à McNeal [8].

Pour $k=(k_1,\dots,k_q)\in\mathbb{N}^q$ et $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_q)$, où $\lambda_j\in S^n$ $(j=1,\dots,q)$, nous utilisons les notations standard : D^k_Λ dénote l'opérateur différentiel $(D_{\lambda_1})^{k_1}\cdots(D_{\lambda_q})^{k_q}$, $\sigma(z,\Lambda,\eta)^k=\sigma(z,\lambda_1,\eta)^{k_1}\cdots\sigma(z,\lambda_q,\eta)^{k_q}$ pour $z\in\Omega$.

Tout $p\in b\Omega$ possède un voisinage ouvert $\mathcal{U}(p)$ tel que si $z,\zeta\in\mathcal{U}(p)\cap\Omega$, pour tous multi-indices k et s, tous multi-vecteurs Λ et Λ', l'on ait :

$$\begin{aligned}&\bigl|\overline{D^k_\Lambda}D^s_{\Lambda'}\mathcal{B}(\zeta,z)\bigr|\leqslant\frac{C(k,s)\sigma(\zeta,\Lambda,\varepsilon(\zeta,z))^{-k}\sigma(\zeta,\Lambda',\varepsilon(\zeta,z))^{-s}}{\operatorname{Vol}P(\zeta,\varepsilon(\zeta,z))}\\&\quad\text{où }\varepsilon(\zeta,z)\approx d(z)+\delta(\zeta)+\mathcal{M}(\zeta,z).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Pour la fonction de Bergman, le résultat est très précis :

$$\mathcal{B}(\zeta,\zeta)\approx\frac{1}{\operatorname{Vol}P(\zeta,\delta(\zeta))}.\tag{2.5}$$

Soit R_0 suffisamment petit :

$$\begin{aligned}&\text{pour }0<r<R\leqslant R_0,\ \forall v,\ |v|=1,\\&\quad\left(\frac{r}{R}\right)\sigma(z,v,R)\lesssim\sigma(z,v,r)\lesssim\left(\frac{r}{R}\right)^{1/m}\sigma(z,v,R).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Remarque : en fait si $v\in T^{\mathbb{C}}_z(\{\zeta,r(\zeta)=r(z)\})$, on a $(r/R)^{1/2}\sigma(z,v,R)\lesssim\sigma(z,v,r)$.

On vérifie aisément (cf. [3]) l'estimation ci-dessous

$$\frac{|\mathcal{B}(\zeta,z)|}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\lesssim\frac{\operatorname{Vol}P(\zeta,\delta(\zeta))}{\operatorname{Vol}P(\zeta,\varepsilon(\zeta,z))}\lesssim\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)}.\tag{2.7}$$

2.4. Étude des termes élémentaires

Dans les preuves des Théorèmes 1 et 2, le terme $u^{(0)}$ sera étudié « à la main » et nous ne le dériverons pas. Nous aurons par contre à considérer pour $k=1,\dots,n-1$ des dérivées $D^\theta u^{(k)}$ d'ordre $\theta=1$ ou 2 et allons estimer $D^\theta_z K^{(k)}$. Plus précisément nous considérons, en vue de la preuve du Théorème 2, et sans perte de généralité, $D^{\theta_1}_{z,v}D^{\theta_2}K^{(k)}(\zeta,z)$, où $\theta_1,\theta_2\in\{0,1\}$ et $D_{z,v}$ désigne une dérivation en z dans la direction d'un vecteur unitaire donné v.

Remarque. Dans la preuve du Théorème 1, nous n'aurons pas besoin de fixer a priori une direction v de dérivation ; aussi utiliserons-nous alors systématiquement l'estimation $\sigma(z,v,\eta)\gtrsim\eta$ (où, suivant les occurrences, $\eta=\delta(\zeta)$, $\eta=\varepsilon(\zeta,z),\dots$). Le cas $\theta_1=\theta_2=1$ n'interviendra par ailleurs que dans la preuve du Théorème 1.

Un point $z=z_0$ (toujours noté z pour alléger) étant fixé dans $\Omega\cap\mathcal{U}$, nous nous placerons en fait pour obtenir des estimées précises, dans le polydisque $\mathcal{C}^0$ ou une « couronne » $\mathcal{C}^\ell$; sauf autre indication, les estimations données ci-dessous sont valables pour $z\in\Omega\cap\mathcal{U}$, $\zeta\in\mathcal{C}^\ell(z)$.

Soit $(e_j^{(\ell)}(z))_j$ une $\gamma 2^\ell d(z)$-base extrémale en z, où γ est une constante absolue telle que l'on ait pour $a_0 > 0$ suffisamment petit : $\mathcal{M}(\zeta, z) \leqslant a \leqslant a_0 \Rightarrow \zeta \in P(z, \gamma a)$. Les coordonnées de ζ dans cette base seront notées $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (on évite β_j^ℓ pour alléger les notations), les dérivations anti-holomorphes en ζ notées $\partial/\partial\overline{\beta_j}$, etc. Et pour z l'analogue avec les lettres latines $(b_1, \ldots, b_n)$. Nous soulignons que le changement de base est unitaire et nous ne préciserons donc pas les coefficients de la matrice de passage.

Les formes différentielles intervenant, après dérivation en z, dans les termes $D_{z,v}K^{(k)}(\zeta, z)$ et $D_z^2 K^{(k)}(\zeta, z)$, $k \geqslant 1$, seront toutes exprimées relativement à cette nouvelle base $(e_j^{(\ell)}(z))_j$. Toutefois nous continuerons à noter par exemple $|\zeta - z|$ et non $|\beta - b|$ pour une meilleure lisibilité.

- $T_0 = |f(\zeta) \cdot e_{j_1}(z)| \leqslant |||f|||_\kappa \delta(\zeta)/\sigma(\zeta, e_{j_1}^{(\ell)}(z), \delta(\zeta))$ simplement d'après les définitions données plus loin (cf. Section 3.1).
- Soit $T_{1,k} = D_{z,v}^{\theta_1} D^{\theta_2}[(\mathcal{B}(\zeta, z)/\mathcal{B}(\zeta, \zeta))^{N-k}(1/\zeta - z|^{2n-2k})]$.
- S'il n'y a aucune dérivation, nous utiliserons juste pour estimer $T_{1,k}$ la majoration (2.7) (à laquelle il sera également fait appel pour les autres cas).
- Nous déduisons immédiatement de (2.4), (2.5) et (2.7)

$$\left| D_{z,v} \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right| \lesssim \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z))}, \quad \zeta, z \in \Omega \cap \mathcal{U}. \tag{2.8}$$

Plus généralement, si $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$:

$$\begin{aligned} |T_{1,k}| &\lesssim \left(\frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-k-1} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \\ &\quad \times \left| \frac{D_{z,v}\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} - \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \cdot \frac{D_{z,v}|\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2} \right| \\ &\lesssim \left(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-k} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z))} + \frac{1}{|\zeta - z|} \right), \quad \zeta, z \in \Omega \cap \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

- Lorsque $\theta_1 = \theta_2 = 1$, nous obtenons après les deux dérivations, en tenant compte de l'estimation $\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) \gtrsim \varepsilon(\zeta, z)$:

$$\begin{aligned} |T_{1,k}| &\lesssim \left(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-k} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\varepsilon(\zeta, z) \cdot |\zeta - z|} + \frac{1}{\varepsilon(\zeta, z)^2} + \frac{1}{|\zeta - z|^2} \right], \quad \zeta, z \in \Omega \cap \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

- Pour le terme $T_2 = \partial_\zeta[D_{z,v}^{\theta_1}|\zeta - z|^2]$, il est clair que $|T_2| \lesssim |\zeta - z|^{1-\theta_1}$.
- Étude du terme $T_{3,k} = D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2}(\bar\partial \widetilde{Q})^k$, $k \geqslant 1$.

$$\bar\partial \widetilde{Q} = \frac{-\bar\partial_\zeta \mathcal{B}(\zeta, \zeta)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)^2} \wedge \widetilde{R} + \frac{\bar\partial_\zeta \widetilde{R}}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)},$$

où $\widetilde{R} = \int_0^1 (1-t)^{-1}\partial_\zeta(\mathcal{B}(\zeta, z_t))\,\mathrm{d}t,\ z_t = \zeta + t(z-\zeta)$.

$$D^{\theta_1}_{z,v} D^{\theta_2}_{z} \widetilde{R} = \int_0^1 (1-t)^{-1}\partial_\zeta\big(D^{\theta_1}_{z,v} D^{\theta_2}_{z}\mathcal{B}(\zeta, z_t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Considérant donc, en particulier pour l'écriture des formes différentielles, la base $(e_j^{(\ell)})_j$, nous obtenons par exemple, en tenant compte des conventions de notations précisées au début de ce paragraphe :

$$D_{z,v}\widetilde{R} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 t\bigg(\frac{\partial}{\partial\beta_i} D_{Z,v}(\mathcal{B})\bigg)(\zeta, z_t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\beta_i,$$

où D_Z signifie que l'on dérive par rapport à la seconde variable.

Puisque $\inf_{0\leqslant t\leqslant 1} \varepsilon(\zeta, z_t) \gtrsim \delta(\zeta)$ et $\inf_{0\leqslant t\leqslant 1} \operatorname{Vol} P(\zeta, \varepsilon(\zeta, z_t)) \gtrsim \operatorname{Vol} P(\zeta, \delta(\zeta))$, nous déduisons de (2.4), (2.6)

$$D_{z,v}\widetilde{R} = \frac{1}{\sigma(\zeta, v, \delta(\zeta))} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{0(1)\,\mathrm{d}\beta_i}{\operatorname{Vol} P(\zeta, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}, \delta(\zeta))}.$$

Nous pouvons écrire également (en vue de la preuve du Théorème 1), en tenant compte de (2.5) et de la Remarque du début de la Section 2.4

$$\frac{D_{z,v}\widetilde{R}}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)} = \sum_{i=1}^n \frac{0(1)\,\mathrm{d}\beta_i}{\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}, \delta(\zeta))} \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\varepsilon(\zeta, z_t)}.$$

On rappelle (cf. [3]) que, uniformément en $t \in [0,1]$, $z, \zeta \in \mathcal{U} \cap \Omega$, où $\mathcal{U}$ est comme en (2.4), $\varepsilon(\zeta, z_t) \gtrsim \delta(\zeta) + t(|r(z)| + |r(z) - r(\zeta)|) \gtrsim \delta(\zeta) + t(d(z) + \delta(\zeta) + |r(z) - r(\zeta)|)$.

Par suite

$$\frac{D^{\theta_1}_{z,v} D^{\theta_2}_{z}\widetilde{R}}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)} = \sum_{i=1}^n \frac{0(1)\,\mathrm{d}\beta_i}{\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}, \delta(\zeta)) \cdot [d(z) + \delta(\zeta) + |r(z) - r(\zeta)|]^{\theta_1+\theta_2}}.$$

Suivant une démarche analogue pour estimer $\bar\partial_\zeta \int_0^1 (1-t)^{-1}\partial_\zeta(D^{\theta_1}_{z,v} D^{\theta_2}_{z}\mathcal{B}(\zeta, z_t))\,\mathrm{d}t = \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 t^{\theta_1+\theta_2}(\frac{\partial^2}{\partial\beta_i\partial\overline{\beta_j}} D^{\theta_1}_{Z,v} D^{\theta_2}_{Z}\mathcal{B})(\zeta, z_t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\beta_i \wedge \mathrm{d}\bar\beta_j$, nous obtenons en fin de compte :

$$T_{3,k} = \sum_{|I|=|J|=k} \mathcal{E}_{I,J}\,\mathrm{d}\beta_I \wedge \mathrm{d}\bar\beta_J, \quad I = (i_1, \ldots, i_k),\ J = (j_1, \ldots, j_k) \text{ avec}$$

$$|\mathcal{E}_{I,J}| \lesssim \frac{1}{\sigma(\zeta, v, \delta(\zeta))} \prod_{p=1}^k \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, \delta(\zeta))} \quad \text{si } \theta_1 = 1 \text{ et } \theta_2 = 0, \tag{2.11}$$

$$|\mathcal{E}_{I,J}| \lesssim \frac{1}{(d(z) + \delta(\zeta) + |r(z) - r(\zeta)|)^{\theta_1+\theta_2}} \prod_{p=1}^k \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, \delta(\zeta))}. \tag{2.12}$$

Remarque. En fait l'estimation de $\int_0^1 t/\varepsilon(\zeta, z_t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas indispensable car la présence du poids dans le noyau K nous permet d'écrire en utilisant (2.7) et la minoration $\inf_{0\leqslant t\leqslant 1} \varepsilon(\zeta, z_t) \gtrsim \delta(\zeta)$:

$$\left(\frac{|\mathcal{B}(\zeta,z)|}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^{\theta_1+\theta_2} |\mathcal{E}_{I,J}| \lesssim \frac{1}{\varepsilon(\zeta,z)^{\theta_1+\theta_2}} \prod_{p=1}^{k} \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, \delta(\zeta))}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \{0,1\}. \tag{2.13}$$

3. Preuve du Théorème 1

3.1. Notations–définitions

Définition 3 (*cf.* [1]). Pour $\zeta \in \Omega$, v un vecteur unitaire de $\mathbb{C}^n$, et ε un réel > 0, on définit la norme : $\kappa(\zeta, v, \varepsilon) = \delta(\zeta)/\sigma(\zeta, v, \varepsilon)$.

Si ε est de l'ordre de $\delta(\zeta)$, on notera simplement $\kappa(\zeta, v)$.

Définition 4 (*cf.* [1]). Pour $f(0,1)$ forme sur Ω, on pose :

- $\|f(\zeta)\|_\kappa = \sup_{v\neq 0}(|f(\zeta)(v)|/\kappa(\zeta, v))$.
- $|\!|\!|f|\!|\!|_\kappa = \sup_{\zeta\in\Omega} \|f(\zeta)\|_\kappa$.

Définition 5. Soit u une fonction bornée définie sur Ω, on dit que $u \in \Lambda^1(\Omega)$ s'il existe une constante C telle que l'on ait : $\forall z \in \Omega$, $\forall h \in \mathbb{C}^n$ tels que $z \pm h \in \Omega$, $|u(z+h) + u(z-h) - 2u(z)| \leqslant C|h|$.

$$\|u\|_{\Lambda^1(\Omega)} := \|u\|_\infty + \sup\bigl\{|u(z+h) + u(z-h) - 2u(z)|/|h|,\ z, z\pm h \in \Omega,\ h \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\bigr\}.$$

La démarche de la démonstration sera la suivante :

- Des arguments standard de convexité (cf. [6], Théorème 4.6) permettent de ne considérer que les termes $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ et $u^{(n-1)}$.
- Le terme $u^{(0)}$ sera traité directement à partir de la définition de Λ^1.
- Pour $u^{(1)}$ et $u^{(n-1)}$, on se servira d'un lemme d'Hardy–Littlewood. En effet, $|D_z^2(u(z))| \lesssim 1/d(z)$ implique que $u \in \Lambda^1$ (cf. [10] ; [7, p. 405]).

3.2. Étude du terme $u^{(0)}$

Rappelons que $u^{(0)}(z) = \int_\Omega f(\zeta) \wedge K^{(0)}(\zeta, z)$ et notons [*BM*] le noyau de Bochner–Martinelli. Nous allons montrer que pour $z \in \Omega$, $0 < h \ll 1$ avec $z + h$ et $z - h \in \Omega$:

$$\left|u^{(0)}(z+h) + u^{(0)}(z-h) - 2u^{(0)}(z)\right| \lesssim \|f\|_\infty |h| \leqslant |\!|\!|f|\!|\!|_\kappa |h|. \tag{3.1}$$

Si $|\zeta - z| \lesssim |h|$, alors $|\zeta - z \pm h| \lesssim |h|$. Ecrivons :

$$\int_{\Omega} = \underbrace{\int_{\Omega_1=\{\zeta \mid |\zeta-z|<3|h|\}}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{\Omega_2=\{\zeta \mid |\zeta-z|>3|h|\}}}_{\mathrm{II}}.$$

• Étude de I : notons $u_1^{(0)}$ pour les intégrales sur Ω_1, et majorons directement chacun des termes $|u_1^{(0)}(z)|$, $|u_1^{(0)}(z \pm h)|$. Puisque $|\mathcal{B}(\zeta, z \pm h)|/\mathcal{B}(\zeta,\zeta) \lesssim 1$, nous obtenons, par exemple pour le terme $u_1^{(0)}(z+h)$:

$$\begin{aligned}\left|u_1^{(0)}(z+h)\right| &= \left|\int_{\Omega_1} \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z+h)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^N f(\zeta) \wedge [BM](\zeta, z+h)\, \mathrm{d}\lambda(\zeta)\right| \\ &\lesssim \|f\|_\infty \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\zeta - z - h|^{2n-1}}\, \mathrm{d}\lambda(\zeta) \lesssim \|f\|_\infty |h| \lesssim |||f|||_\kappa |h|.\end{aligned}$$

• Étude de II : Par convexité et régularité du bord du domaine Ω, on peut considérer localement un système de coordonnées complexes $w_1 = \zeta_1 - z_1, \ldots, w_n = \zeta_n - z_n$ tel que $\operatorname{Re} w_1 = r(\zeta) - r(z)$ (l'axe des w_1 correspondant à la direction complexe normale en z à $\{\zeta, r(\zeta) = r(z)\}$) ; nous avons alors $\varepsilon(\zeta, z) \gtrsim d(z) + |w_1|$. Nous notons $w = (w_1, w') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

On va alors poser : $\{w \mid 1 > |w| > 3|h|\} = \Omega_3 \cup \Omega_4$ où $\Omega_3 = \{|w| > 3|h| \text{ et } |w_1| < |h|\}$ et $\Omega_4 = \{|w| > 3|h| \text{ et } |w_1| > |h|\}$. Notant ici pour alléger $u^{(0)}$ les intégrales sur Ω_3, on majore $|u^{(0)}(z+h) + u^{(0)}(z-h) - 2u^{(0)}(z)|$ par $|u^{(0)}(z+h) - u^{(0)}(z)| + |u^{(0)}(z-h) - u^{(0)}(z)|$.

Afin de ne pas alourdir la présentation des calculs, nous gardons par abus la variable ζ dans les premières étapes des estimations. Nous devons donc étudier (l'autre terme se traitant de manière identique) :

$$\begin{aligned}J = \bigg|\int_{\Omega_3} f(\zeta)\bigg(&\left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z+h)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^N [BM](\zeta, z+h) \\ &- \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^N [BM](\zeta, z)\bigg)\, \mathrm{d}\lambda(\zeta)\bigg|.\end{aligned}$$

Puisque la fonction poids $\mathcal{B}(\zeta, z)/\mathcal{B}(\zeta,\zeta)$ est uniformément bornée, nous avons

$$\begin{aligned}J \lesssim{}& \|f\|_\infty \int_{\Omega_3} \left|\frac{\mathcal{B}(\zeta, z+h) - \mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z+h)|^k |\mathcal{B}(\zeta, z)|^{N-1-k}}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)^{N-1}} \\ &\times \frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-1}} + \|f\|_\infty \int_{\substack{|\zeta_1 - z_1| < |h| \\ |\zeta - z| > 3|h|}} \left(\frac{1}{|\zeta - z - h|^{2n-1}} + \frac{1}{(|\zeta - z|)^{2n-1}}\right) \mathrm{d}\lambda(\zeta) \\ :={}& \|f\|_\infty (J_1 + J_2).\end{aligned}$$

• Pour estimer J_1, remarquons simplement que :

$$\frac{|\mathcal{B}(\zeta, z+h) - \mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \lesssim \frac{|h|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\varepsilon(\zeta, z+th)\,\mathrm{Vol}\,P(\zeta, z+th)} \lesssim \frac{|h|}{\delta(\zeta)} \tag{3.2}$$

puisque l'on a, uniformément en t, z, ζ :

$$\mathcal{B}(\zeta, \zeta)\,\mathrm{Vol}\,P(\zeta, z+th) \gtrsim 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(\zeta, z+th) \gtrsim \delta(\zeta).$$

Comme apparaît dans l'intégrande de J_1 au moins un terme $|\mathcal{B}(\zeta, z)|/\mathcal{B}(\zeta, \zeta)$ ou un terme $|\mathcal{B}(\zeta, z+h)|/\mathcal{B}(\zeta, \zeta)$, nous avons en tenant compte de (2.7) :

$$J_1 \lesssim |h| \int_{\Omega_3} \frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)|\zeta - z|^{2n-1}} + |h| \int_{\Omega_3} \frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z+h)|\zeta - z|^{2n-1}}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} |h| \int_{\Omega_3} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\varepsilon(\zeta, z)|\zeta - z|^{2n-1}} &\leqslant |h| \int\limits_{\substack{|w_1|<|h| \\ |w'|>|h|}} \frac{\mathrm{d}\lambda(w)}{(d(z) + |w_1|)(|w_1| + |w'|)^{2n-1}} \\ &\lesssim |h| \int\limits_{\substack{\rho_1<|h| \\ \rho'>|h|}} \mathrm{d}\rho_1 \frac{\mathrm{d}\rho'}{(\rho')^2} \lesssim |h|. \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat pour $|h| \int_{\Omega_3} \varepsilon(\zeta, z+h)^{-1} |\zeta - z|^{1-2n}\, \mathrm{d}\zeta$. L'estimation $J_2 \lesssim |h|$ est immédiate.

• Étude de $\int_{\Omega_4} f(\zeta) \wedge K^{(0)}(\zeta, z)$:

$$\begin{aligned} & f(\zeta) \wedge \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N [BM](\zeta, z) \\ &\quad = \sum_{j=1}^n cste(j, n) f_j(\zeta) \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N \frac{\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}}{|\zeta - z|^{2n}} \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\zeta_i\, \mathrm{d}\overline{\zeta_i} \end{aligned}$$

posons pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\Phi_j(\zeta, z) = (\mathcal{B}(\zeta, z)/\mathcal{B}(\zeta, \zeta))^N (\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})/|\zeta - z|^{2n}$.

Supposons $|\zeta - z| > 3|h|$, $h \neq 0$ fixé, avec $z \pm h \in \Omega$; nous avons par Taylor

$$\begin{aligned} \Phi_j(\zeta, z+h) + \Phi_j(\zeta, z-h) - 2\Phi_j(\zeta, z) &= \int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}_z^2 \Phi_j(\zeta, z+th) \cdot h^{(2)}\, \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}_z^2 \Phi_j(\zeta, z-th) \cdot h^{(2)}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $w = \zeta - z \in \Omega_4$, nous avons d'après (2.4), (2.2), uniformément en $w = \zeta - z \in \Omega_4$, $t, z \in \Omega \cap \mathcal{U}$, $h, |h| < 1$, pour toute dérivation D_z^p d'ordre p en z :

$$\left| D_z^p \frac{\mathcal{B}(\zeta,z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)} \right|_{z\pm th} \lesssim \frac{\operatorname{Vol} P(\zeta,\delta(\zeta))}{\operatorname{Vol} P(\zeta,\varepsilon(\zeta,z\pm th))\cdot(\varepsilon(\zeta,z\pm th))^p}$$
$$\lesssim \frac{1}{(\varepsilon(\zeta,z\pm th))^p} \lesssim \frac{1}{(|\zeta_1-z_1|+|h|)^p}.$$

Par suite, en tenant toujours compte de la majoration $|\mathcal{B}(\zeta,z\pm th)|/\mathcal{B}(\zeta,\zeta)\lesssim 1$:

$$\left|\mathrm{d}_z^2\Phi_j(\zeta,z\pm th)\cdot h^{(2)}\right|$$
$$\lesssim \frac{|h|^2}{|\zeta-z|^{2n-1}}\left[\frac{1}{|\zeta-z|^2}+\frac{1}{|\zeta-z|(|\zeta_1-z_1|+|h|)}+\frac{1}{(|\zeta_1-z_1|+|h|)^2}\right].$$

Par des calculs immédiats

$$|h|^2\int\limits_{C>|w_1|>|h|}\frac{\mathrm{d}\lambda(w)}{|w|^{2n+1}}\lesssim |h|,$$
$$|h|^2\int\limits_{|w_1|>|h|}\frac{\mathrm{d}\lambda(w)}{|w|^{2n-1}(|w_1|+|h|)^2}\lesssim |h|^2\int\limits_{\rho_1>|h|}\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\rho_1^2}\lesssim |h|.$$

3.3. Étude du terme $u^{(1)}=\int_\Omega f(\zeta)\wedge K^{(1)}(\zeta,z)$

Nous supposons dans ce paragraphe et les suivants que $z\in\Omega\cap\frac{1}{2}\mathcal{U}$ et considérons seulement les intégrales $\int_{\Omega\cap\mathcal{U}=\bigcup\mathcal{C}^\ell}$.

Pour $\zeta\in\mathcal{C}^\ell$, nous avons en tenant compte de (2.3), (2.7) et de la Section 2.4 (en particulier des estimations (2.9), (2.10) et (2.13) :

$$\left|D_z^2 f(\zeta)\wedge K^{(1)}(\zeta,z)\right|\lesssim |||f|||_\kappa\sum_{\substack{i,j,p=1\\ j\neq p}}^n\left(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)}\right)^{N-3}\frac{\delta(\zeta)}{\sigma(\zeta,e_j^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))}$$
$$\times\frac{(ED)}{\sigma(\zeta,e_i^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))\sigma(\zeta,e_p^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))|\zeta-z|^{2n-3}},$$

où

$$(ED)=\frac{1}{|\zeta-z|^2}\quad\text{ou}\ \frac{1}{|\zeta-z|\varepsilon(\zeta,z)}\ \text{ou}\ \frac{1}{\varepsilon(\zeta,z)^2}. \tag{3.3}$$

Supposons par exemple $j<p$. Rappelons les estimations suivantes, valables pour $\zeta\in\mathcal{C}^\ell\subset P(z,\gamma 2^\ell d(z))$:

$$\frac{\delta(\zeta)}{\sigma(\zeta,e_i^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))}=0(1)\quad\forall i=1,\dots,n,$$
$$\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)\sigma(\zeta,e_j^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))}\lesssim\frac{1}{\varepsilon(\zeta,z)}\lesssim\frac{1}{2^\ell d(z)},$$
$$\sigma\big(\zeta,e_p^{(\ell)}(z),\delta(\zeta)\big)\gtrsim\frac{\delta(\zeta)}{2^\ell d(z)}\sigma\big(\zeta,e_p^{(\ell)}(z),\gamma 2^\ell d(z)\big)\approx\frac{\delta(\zeta)}{2^\ell d(z)}\sigma\big(z,e_p^{(\ell)}(z),\gamma 2^\ell d(z)\big).$$

Nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{C}^\ell} \left|f(\zeta)\wedge D_z^2K^{(1)}(\zeta,z)\right|$$
$$\lesssim \frac{|||f|||_\kappa}{2^\ell d(z)}\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{\sigma(z,e_p^{(\ell)}(z),2^\ell d(z))}\int_{\mathcal{C}^\ell}(ED)\cdot\frac{(\delta(\zeta))^2\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)^2|\zeta-z|^{2n-3}}. \tag{3.4}$$

En provenance de (ED), considérons par exemple le terme $\varepsilon(\zeta,z)^{-2}$; posons pour tout i, $|\zeta_i-z_i|$ ou plutôt $|\beta_i-b_i|=r_i$ et notons pour alléger σ_i pour $\sigma(z,e_i^{(\ell)}(z),\gamma 2^\ell d(z))$; nous pouvons écrire puisque $p\geqslant 2$:

$$\int_{\mathcal{C}^\ell}\frac{(\delta(\zeta))^2\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)^4|\zeta-z|^{2n-3}}\lesssim\frac{1}{(2^\ell d(z))^2}\int_{\substack{r_1<\sigma_1\\ r_p<\sigma_p}} r_1\,\mathrm{d}r_1\,\mathrm{d}r_p\lesssim\sigma_p. \tag{3.5}$$

(Nous avons utilisé pour la dernière inégalité le fait que $\sigma_1=\sigma(z,e_1^{(\ell)}(z),\gamma 2^\ell d(z))\approx 2^\ell d(z)$.)

L'intégrale faisant intervenir un terme en $(|\zeta-z|\varepsilon(\zeta,z))^{-1}$ se traite de même, avec une estimation finale analogue.

Avec toujours les mêmes notations :

$$\int_{\mathcal{C}^\ell}\frac{(\delta(\zeta))^2\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{(\varepsilon(\zeta,z))^2|\zeta-z|^{2n-1}}\lesssim\int_{\mathcal{C}^\ell}\frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-1}}\lesssim\int_{r_p<\sigma_p}\mathrm{d}r_p\lesssim\sigma_p. \tag{3.6}$$

Nous déduisons de (3.4)–(3.6) et de la définition de $u^{(1)}$:

$$\left|D_z^2(u^{(1)})\right|\lesssim|||f|||_\kappa\big(d(z)\big)^{-1} \tag{3.7}$$

par suite $u^{(1)}\in\Lambda^1(\Omega)$.

3.4. Étude du terme $u^{(n-1)}$

Bien sûr, dans ce cas, on suppose $n\geqslant 3$. On va donc examiner le terme suivant :

$$\begin{aligned} I_{n-1}&=D_z^2u^{(n-1)}(z)\\ &=D_z^2\int_\Omega f(\zeta)\wedge\frac{(\partial_\zeta|\zeta-z|^2)\wedge(\bar\partial_\zeta\widetilde{Q})^{n-1}}{|\zeta-z|^2}\cdot\left(\frac{\mathcal{B}(\zeta,z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^{N-n+1}.\end{aligned}$$

Les dérivations en z (celles notées $D^{\theta_j(\ell_k)}$ ci-dessous) peuvent porter sur différents facteurs du noyau $K^{(n-1)}$; nous allons encore intégrer sur chaque « couronne » $\mathcal{C}^{(\ell)}$. Suivant la démarche indiquée dans la Section 2.4, nous sommes amenés à estimer des intégrales des types suivants :

$$\mathcal{I}_{n-1}^\ell=\sum_{\substack{|I|=n\\|J|=n}}\int_{\mathcal{C}^\ell}D^{\theta_1(\ell_0)}D^{\theta_2(\ell_0)}\left[\left(\frac{\mathcal{B}(\zeta,z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\right)^{N-n+1}\frac{1}{|\zeta-z|^2}\right]$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \beta_{i_1}}\big[D^{\theta_1(\ell_1)}|\zeta - z|^2\big]\frac{[f(\zeta)\cdot e_{j_1}(z)]}{(\mathcal{B}(\zeta,\zeta))^{n-1}}$$

$$\times \prod_{k=2}^{n}\int_0^1 (1-t)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial \beta_{i_k}\partial \overline{\beta_{j_k}}}\big[D^{\theta_1(\ell_k)}D^{\theta_2(\ell_k)}\mathcal{B}(\zeta,z_t)\big]\,\mathrm{d}t\cdot \mathrm{d}\beta_I\wedge \mathrm{d}\overline{\beta_J},$$

$$\mathcal{J}_{n-1}^{\ell} = \sum_{\substack{|I|=n\\|J|=n}}\int_{\mathcal{C}^{\ell}} D^{\theta_1(\ell_0)}D^{\theta_2(\ell_0)}\bigg[\bigg(\frac{\mathcal{B}(\zeta,z)}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\bigg)^{N-n+1}\frac{1}{|\zeta-z|^2}\bigg]\frac{\partial}{\partial\beta_{i_1}}\big[D^{\theta_1(\ell_1)}|\zeta-z|^2\big]$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \overline{\beta_{j_2}}}\bigg(\frac{1}{\mathcal{B}(\zeta,\zeta)}\bigg)\int_0^1 (1-t)^{-1}\frac{\partial}{\partial\beta_{i_2}}\big[D^{\theta_1(\ell_2)}D^{\theta_2(\ell_2)}\mathcal{B}(\zeta,z_t)\big]\,\mathrm{d}t$$

$$\times \frac{[f(\zeta)\cdot e_{j_1}(z)]}{(\mathcal{B}(\zeta,\zeta))^{n-2}}\prod_{k=3}^{n}\int_0^1 (1-t)^{-1}$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial\beta_{i_k}\partial\overline{\beta_{j_k}}}D^{\theta_1(\ell_k)}D^{\theta_2(\ell_k)}\big[\mathcal{B}(\zeta,z_t)\big]\,\mathrm{d}t\cdot d\beta_I\wedge d\overline{\beta_J}$$

avec les $\theta_1(\ell_k)$, $k=0,1,\dots,n$, tous nuls, sauf un et un seul, qui est égal à 1 et la même condition vérifiée pour les $\theta_2(\ell_k)$, $k=0,2,\dots,n$; $I=(i_1,\dots,i_n)$, $J=(j_1,\dots,j_n)$, $\mathrm{d}\beta_I=\mathrm{d}\beta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\beta_{i_n}$, $\mathrm{d}\overline{\beta_J}=\mathrm{d}\bar\beta_{j_1}\cdots\mathrm{d}\bar\beta_{j_n}$.

Remarque. Les estimations de la seconde intégrale $\mathcal{J}_{n-1}^{\ell}$ seront les mêmes que celles de $\mathcal{I}_{n-1}^{\ell}$, nous n'étudierons que la première intégrale.

Nous utilisons les estimations élémentaires obtenues dans la Section 2.4, ce qui donne la majoration suivante :

$$\big|\mathcal{I}_{n-1}^{\ell}\big| \lesssim |||f|||_k\bigg|\int_{\mathcal{C}^{\ell}}\bigg(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)}\bigg)^{N-n+1}\cdot\frac{1}{|\zeta-z|}\cdot\frac{\delta(\zeta)}{\sigma(\zeta,e_{j_1}^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))}$$

$$\times\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{\sigma(\zeta,e_{j_k}^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{\sigma(\zeta,e_{i_k}^{(\ell)}(z),\delta(\zeta))}\cdot(ED)\cdot\mathrm{d}\beta_I\wedge\mathrm{d}\overline{\beta_J}\bigg|, \tag{3.8}$$

où (ED) est défini en (3.3).

On va utiliser (2.6) avec $R=\gamma 2^{\ell}d(z)$ et $r=\delta(\zeta)$. Le poids sert à compenser les facteurs $2^{\ell}d(z)/\delta(\zeta)$ qui apparaissent, puisque $\forall\ell\geqslant 0$, $\varepsilon(\zeta,z)\gtrsim 2^{\ell}d(z)$ si $\zeta\in\mathcal{C}^{\ell}$. Nous omettrons en fait souvent (sans préjudice) d'écrire la constante γ. L'intégrande se majore alors par des termes de la forme suivante :

$$\mathrm{A}=\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta,z)}\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{\sigma(\zeta,e_{j_k}^{(\ell)}(z),2^{\ell}d(z))\cdot\sigma(\zeta,e_{i_k}^{(\ell)}(z),2^{\ell}d(z))}$$

$$\times\frac{\delta(\zeta)}{\sigma(\zeta,e_{j_1}^{(\ell)}(z),2^{\ell}d(z))}\cdot\frac{(ED)}{|\zeta-z|},$$

où $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ et $i_2, \dots, i_n$ sont deux à deux distincts.

Soit i_1 tel que $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$; nous obtenons pour $\zeta \in \mathcal{C}^\ell \subset P(z, \gamma 2^\ell d(z))$, en tenant compte de (2.1) et (2.2) :

$$\mathrm{A} \lesssim \frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\operatorname{Vol} P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{(ED)}{|\zeta - z|} \cdot \frac{\delta(\zeta)^2}{2^\ell d(z)}.$$

Suivant le terme en provenance de (ED) intervenant dans l'intégrande A, nous devrons estimer :

$$\frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\operatorname{Vol} P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{1}{2^\ell d(z)} \times \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{\delta(\zeta)^2 \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\operatorname{Vol} P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{1}{2^\ell d(z)} \times \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{\delta(\zeta) \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^2}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\operatorname{Vol} P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{1}{2^\ell d(z)} \times \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|}. \tag{3.11}$$

Comme (3.9) et (3.10) se traitent de manière similaire, nous n'étudierons que (3.9). Enfin, comme les calculs se ramèneront en partie à l'étude de (3.11), nous commencerons par cette dernière :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|} &\lesssim \int_{|w_i| < \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))} \frac{\mathrm{d}\lambda(w)}{|w_1| + \cdots + |w_n|} \\ &\lesssim \int_{\rho_i < \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))} \frac{\rho_1 \mathrm{d}\rho_1 \cdots \rho_n \mathrm{d}\rho_n}{\rho_{i_1}} \lesssim \frac{\operatorname{Vol} P(z, 2^\ell d(z))}{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}.\end{aligned}$$

Pour l'étude du terme (3.9), écrivons

$$\int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{\delta(\zeta)^2 \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3} = \int_{\mathcal{C}^\ell \cap \{\delta(\zeta) \geqslant 2c_1 d(z)\}} (\cdots) + \int_{\mathcal{C}^\ell \cap \{\delta(\zeta) \leqslant 2c_1 d(z)\}} (\cdots),$$

où $c_1 \geqslant 1$ est une constante telle que l'on ait pour $\delta(\zeta), d(z) \leqslant \eta_0$ (η_0 pouvant être choisi tel que $0 < \eta_0 < 1$) : $\delta(\zeta) \leqslant c_1(d(z) + |r(\zeta) - r(z)|)$.

- Si $d(z) \leqslant \delta(\zeta)/2c_1$, alors $\delta(\zeta)/|\zeta - z| = 0(1)$ d'où la première intégrale ci-dessus se ramène à celle de (3.11).
- Pour estimer la seconde intégrale, supposons sans perte de généralité $i_1 \neq n, n-1$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}^\ell \cap \{\delta(\zeta) < 2c_1 d(z)\}} \frac{\delta(\zeta)^2 \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3} \\ &\quad\lesssim d(z)^2 \int_{\rho_i < \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))} \frac{\rho_1 \, \mathrm{d}\rho_1 \cdots \rho_{n-2} \, \mathrm{d}\rho_{n-2} \, \mathrm{d}\rho_{n-1} \, \mathrm{d}\rho_n}{\rho_{i_1}}\end{aligned}$$

$$\lesssim \frac{d(z)^2}{\sigma(z, e_{n-1}, 2^\ell d(z))\sigma(z, e_n, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{\mathrm{Vol}\, P(z, 2^\ell d(z))}{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}.$$

Or $d(z) \leqslant 2^\ell d(z) \approx \sigma(z, e_1, 2^\ell d(z)) \leqslant \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z)),\ \forall i$. D'où l'estimation souhaitée pour (3.9).

On a montré ainsi que, pour tout ℓ : $|D_z^2 \int_{\mathcal{C}^\ell} f(\zeta) \wedge K^{(n-1)}| \lesssim |||f|||_\kappa (2^\ell d(z))^{-1}$. Par suite

$$\left\| u^{(n-1)} \right\|_{\Lambda^1(\Omega)} \lesssim |||f|||_\kappa. \tag{3.12}$$

4. Preuve du Théorème 2

4.1. Une condition suffisante

Définition 6. Pour $0 < \alpha < \frac{1}{m}$, on dit que $u \in \Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$ s'il existe une constante C telle que pour $z, \zeta \in \Omega$,

$$\left| u(z) - u(\zeta) \right| \leqslant C\big(\rho(z, \zeta)\big)^\alpha.$$

McNeal et Stein donnent dans [9] une caractérisation « localisée » en termes de conditions discrètes pour les fonctions de $\Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$ lorsque $0 < \alpha < 1/m$. Pour prouver que ces conditions impliquent l'appartenance à l'espace $\Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$ (espace noté $\widetilde{\Gamma}_\alpha(\Omega)$ dans [9]), les auteurs utilisent seulement des estimations sur les dérivées directionnelles d'ordre un. La preuve du résultat ci-dessous est en fait contenue dans [9], mais nous en redonnons les éléments de démonstration afin de faciliter la lecture.

Proposition 7. *Soit $0 < \alpha < 1/m$; si u est une fonction bornée, de classe C^1 sur Ω telle que*

$$\left| \nabla u(z) \right| \lesssim d(z)^{-1+\alpha} \quad \textit{et} \quad \forall v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1, \quad \left| D_v u(z) \right| \lesssim \frac{d(z)^\alpha}{\sigma(z, v, d(z))}.$$

Alors u appartient à $\Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$.

Lemme 8 [9]. *Soit $0 < \alpha < 1/m$ et u une fonction définie sur Ω telle que pour tout $k \in \mathbb{N},\ u = b_k + g_k$ avec :*

(i) $\|b_k\|_\infty \lesssim 2^{-k\alpha}$,
(ii) *Si* $|r(z)| < 2^{-k},\ v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1$: $|D_v g_k(z)| \lesssim \sigma(z, v, 2^{-k})^{-1} \cdot 2^{-k\alpha}$,
(iii) *Si* $|r(z)| \geqslant 2^{-k},\ |\nabla g_k(z)| \lesssim 2^k \cdot 2^{-k\alpha}$.

Alors u appartient à l'espace $\Gamma^\alpha_{(\rho)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous renvoyons à la page 196 de [9]. □

Preuve de la proposition. Nous allons vérifier que u satisfait les conditions du Lemme 8.

Soient $(U_j,\ p_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ une famille finie telle que pour tout j, U_j est voisinage ouvert de $p_j \in b\Omega$, les p_j sont deux à deux distincts, la réunion V des U_j est un voisinage de $b\Omega$ sur lequel est définie une projection régulière π sur $b\Omega$ et est tel que $|r(z)| < \eta_1$ où $0 < \eta_1 \ll 1$ pour tout z de V ; on peut supposer l'existence d'une constante $a > 0$ telle que pour $1 \leqslant j \leqslant s$, si ν_j désigne la normale intérieure en p_j à $b\Omega$, alors pour tout z de U_j, $0 \leqslant t \leqslant a$, $d(z + t\nu_j) \gtrsim t$ et si $z \in \frac{1}{2}U_j$ et $0 \leqslant t \leqslant a$ alors $z + t\nu_j \in U_j$; si z et $\zeta \in U_j \cap \Omega$, $\mathcal{M}(z,\zeta) \approx |z_1 - \zeta_1| + \cdots$ où les composantes de z et ζ sont écrites dans une $\gamma d(z)$-base extrémale de McNeal au point z (γ est défini Section 2.4).

Soit k fixé dans $\mathbb{N}$. Suivant [9], posons pour $z \in \frac{1}{2}V$ en notant pour simplifier $\nu = \nu_j$ si $z \in U_j$:

$$u(z) = b_k + g_k$$

avec

$$b_k = -\int_0^{2^{-k}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u(z+t\nu)\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g_k = u\big(z + 2^{-k}\nu\big).$$

L'hypothèse sur ∇u et la condition $d(z + t\nu) \gtrsim t$ impliquent immédiatement la condition voulue (i) du Lemme 8 sur b_k.

Supposons $|r(z)| < 2^{-k}$; alors pour v vecteur unitaire de $\mathbb{C}^n$:

$$\big|D_v g_k(z)\big| \lesssim \frac{(d(z+2^{-k}\nu))^{\alpha}}{\sigma(z+2^{-k}\nu, v, d(z+2^{-k}\nu))} \lesssim \frac{2^{-k\alpha}}{\sigma(z+2^{-k}\nu, v, d(z+2^{-k}\nu))}$$

comme $z + 2^{-k}\nu \in P(z, d(z + 2^{-k}\nu))$, $\sigma(z + 2^{-k}\nu, v, d(z + 2^{-k}\nu)) \approx \sigma(z, v, d(z + 2^{-k}\nu)) \gtrsim \sigma(z, v, 2^{-k})$ et l'estimation (ii) du Lemme 8 est montrée.

Supposons $|r(z)| \geqslant 2^{-k}$; nous avons $|\nabla g_k(z)| \lesssim [d(z + 2^{-k}\nu)]^{-1+\alpha} \lesssim d(z)^{-1+\alpha} \lesssim 2^{k(1-\alpha)}$. $\square$

4.2. Estimation de u

Dans cette partie nous montrerons donc que la solution u de l'équation $\bar\partial u = f$ qui est la balayée de f par le noyau K (cf. (2.3)) appartient à des espaces de Lipschitz anisotropes $\Gamma^{\alpha}_{(\rho)}$ lorsque f est à coefficients bornés.

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)} \quad \text{où } u^{(k)}(z) = \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta, z).$$

L'estimation de $u^{(0)}$ est immédiate ; rappelons en effet que pour $|h| \ll 1$ et z près du bord : $|h|^m \lesssim \mathcal{M}(z, z+h) \lesssim \mathcal{N}(z, z+h)$. Nous avons en fait montré en (3.1) l'estimation $\|u^{(0)}\|_{\Lambda^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_\infty$ ($\leqslant |\!|\!| f |\!|\!|_\kappa$). Par des calculs classiques (analogues à ceux effectués au début de la Section 3.2), en utilisant (3.2) et l'estimation $\int_\Omega |[BM](\zeta, z+h) - [BM](\zeta, z)|\,\mathrm{d}\zeta \lesssim |h|\,|\ln|h||$, nous obtenons :

$$\big|u^{(0)}(z+h) - u^{(0)}(z)\big| \lesssim \|f\|_\infty \cdot |h|\big|\ln|h|\big| \quad \text{pour } z, z+h \in \Omega.$$

Pour l'étude des autres termes, nous utiliserons la Proposition 7. Les $u^{(k)}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$ sont bornées sur Ω et, si $k = 1, \ldots, n-1$, $|\nabla u^{(k)}(z)| \lesssim d(z)^{-1+1/m}$ (voir [3] pour les détails de calculs concernant ces résultats).

Nous allons démontrer dans ce paragraphe la proposition suivante, ce qui conclura la preuve du Théorème 2.

Proposition 9. $|D_{z,v}u^{(k)}(z)| \lesssim \|f\|_{L^\infty} d(z)^\alpha / \sigma(z, v, d(z))$, $\forall \alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{m}$, $\forall k = 1, \ldots, n-1$.

Il suffit de prouver l'estimation de la proposition pour $k = 1$ et $k = n-1$. $D_{z,v}K^{(n-1)}(\zeta, z) = A_1 + A_2 + A_3$, avec :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^{N-n+1} \frac{(\partial_\zeta |\zeta - z|^2)}{|\zeta - z|^2} \wedge D_{z,v}\big((\bar\partial_\zeta \widetilde{Q})^{n-1}\big),\\
A_2 &= \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^{N-n+1} \cdot D_{z,v}\left(\frac{\partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \big(\bar\partial_\zeta \widetilde{Q}\big)^{n-1},\\
A_3 &= D_{z,v}\left(\left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^{N-n+1}\right) \cdot \frac{\partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2} \wedge \big(\bar\partial_\zeta \widetilde{Q}\big)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Il suffit d'étudier, toujours pour $z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U}$, $\int_{\Omega\cap\mathcal{U}} f(\zeta) \wedge A_j(\zeta, z)$ pour $j = 1, 2$. En effet (2.8), (2.11), (2.13) – avec $\theta_1 = \theta_2 = 0$ – et (2.7) prouvent que

$$A_s = \sum_{|I|=|J|=n-1} \mathcal{A}^{(s)}_{I,J}\, \mathrm{d}\beta_I \wedge \mathrm{d}\bar\beta_J, \quad s = 1, 2, 3,$$

avec pour $I = (i_1, \ldots, i_{n-1})$, $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{A}^{(1)}_{I,J}\big| &\lesssim \left(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)}\right)^{N-n+1} \cdot \frac{1}{\sigma(\zeta, v, \delta(\zeta))}\\
&\quad \times \frac{1}{|\zeta - z|} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(\zeta, e^{(\ell)}_{i_p}, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e^{(\ell)}_{j_p}, \delta(\zeta))},\\
\big|\mathcal{A}^{(3)}_{I,J}\big| &\lesssim \left(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)}\right)^{N-n} \cdot \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z))}\\
&\quad \times \frac{1}{|\zeta - z|} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(\zeta, e^{(\ell)}_{i_p}, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e^{(\ell)}_{j_p}, \delta(\zeta))},\\
\big|\mathcal{A}^{(2)}_{I,J}\big| &\lesssim \left(\frac{\delta(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)}\right)^{N-n+1} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|^2} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(\zeta, e^{(\ell)}_{i_p}, \delta(\zeta))\sigma(\zeta, e^{(\ell)}_{j_p}, \delta(\zeta))}.
\end{aligned}$$

Comme $\delta(\zeta) \lesssim \varepsilon(\zeta, z)$ et, pour $\zeta \in \mathcal{C}^\ell \subset P(z, \gamma 2^\ell d(z))$: $\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) \approx \sigma(\zeta, v, \varepsilon(\zeta, z)) \gtrsim \sigma(\zeta, v, \delta(\zeta))$, il est inutile de considérer A_3.

Nous avons (cf. (2.6)), $\sigma(\zeta, v, \delta(\zeta)) \gtrsim (\delta(\zeta)/2^\ell d(z))\sigma(\zeta, v, \gamma 2^\ell d(z))$ et, pour $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$: $\sigma(\zeta, v, \gamma 2^\ell d(z)) \approx \sigma(z, v, \gamma 2^\ell d(z)) \gtrsim 2^{\ell/m}\sigma(z, v, d(z))$. Utilisant (2.6) comme dans la Section 3.4, nous obtenons en notant toujours $\sigma_j(z, 2^\ell d(z))$ ou même σ_j pour $\sigma(z, e_j^{(\ell)}, \gamma 2^\ell d(z))$:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}\right| \lesssim \frac{1}{2^{\ell/m}\sigma(z,v,d(z))|\zeta - z|} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z))\sigma_{j_p}(z, 2^\ell d(z))}, \\
&\quad z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U},\ \zeta \in \mathcal{C}^\ell, \qquad (4.1)\\
&\left|\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}\right| \lesssim \frac{1}{|\zeta - z|^2} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z))\sigma_{j_p}(z, 2^\ell d(z))}, \quad z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U},\ \zeta \in \mathcal{C}^\ell,
\end{aligned}$$

où $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n,\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{n-1} \leqslant n$.

• Soient, pour I, J donnés, i_n, j_n tels que $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Posons $\rho_j = |\beta_j - b_j|,\ \forall j = 1, \ldots, n$ (avec les notations du Paragraphe 2.4).

Si $i_n = j_n$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}^0} \left|\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}\right| &\lesssim \frac{1}{\sigma(z,v,d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}(z,d(z))^2} \int_{\substack{\rho_j < \sigma_j \\ j=1,\ldots,n}} \prod_{p=1}^{n-1} \rho_{i_p}\, \mathrm{d}\rho_{i_p} \cdot \mathrm{d}\rho_{i_n} \\
&\lesssim \frac{\sigma_{i_n}(z,d(z))}{\sigma(z,v,d(z))} \lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))}.
\end{aligned}$$

Si $i_n \neq j_n$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}^0} \left|\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}\right| &\lesssim \frac{1}{\sigma(z,v,d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}\sigma_{j_p}} \int_{\rho_j < \sigma_j} \prod_{k \neq i_n, j_n} \rho_k\, \mathrm{d}\rho_k \cdot \rho_{i_n}\, \mathrm{d}\rho_{i_n}\, \mathrm{d}\rho_{j_n} \\
&\lesssim \frac{\sigma_{i_n}(z,d(z))}{\sigma(z,v,d(z))} \lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$I_1^{(0)} := \left| \int_{\mathcal{C}^0} f(\zeta) \wedge A_1(\zeta, z) \right| \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))}. \qquad (4.2)$$

Dans l'estimation de $I_1^{(\ell)} := |\int_{\mathcal{C}^{(\ell)}} f(\zeta) \wedge A_1(\zeta, z)|$, nous allons accepter une perte en $d(z)^{-\eta}$, η arbitrairement petit, afin d'assurer la convergence de la série $\sum I_1^\ell$.

Puisque Ω est borné, et que $|\zeta - z| \approx |\zeta - z| + 2^\ell d(z)$ si $\zeta \in \mathcal{C}^\ell,\ \ell \geqslant 1$, nous obtenons, en supposant $i_n = j_n$ par exemple :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}^\ell} \left|\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}\right| &\lesssim \frac{1}{2^{\ell/m}\sigma(z,v,d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)))^2} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{|\zeta - z|^\eta\, \mathrm{d}\lambda(\zeta)}{(|\zeta - z| + 2^\ell\, \mathrm{d}(z))^{1+\eta}} \\
&\lesssim \frac{1}{2^{\ell/m}\sigma(z,v,d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)))^2} \cdot \frac{1}{(2^\ell d(z))^\eta}
\end{aligned}$$

$$\times \int\limits_{\substack{\rho_j<\sigma_j\\ j=1,\dots,n}} \prod_{p=1}^{n-1} \rho_{i_p}\,\mathrm{d}\rho_{i_p}\cdot \mathrm{d}\rho_{i_n}$$
$$\lesssim \frac{\sigma_{i_n}(z,2^\ell d(z))}{2^{\ell/m}\sigma(z,v,d(z))(2^\ell d(z))^\eta} \lesssim \frac{d(z)^{1/m-\eta}}{2^{\ell\eta}\sigma(z,v,d(z))}.$$

Les calculs sont analogues si $i_n \neq j_n$, en sorte que

$$I_1^{(\ell)} \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{1/m-\eta}}{2^{\ell\eta}\sigma(z,v,d(z))},\quad \eta>0,\ \text{arbitrairement petit.} \tag{4.3}$$

• Pour l'étude de $I_2 := \int_{\Omega\cap\mathcal{U}} f(\zeta)\wedge A_2(\zeta,z)$, le terme $\sigma(z,v,d(z))$ sera introduit artificiellement ; en utilisant (4.1) et la majoration $\sigma(z,v,d(z)) \lesssim d(z)^{1/m}$, nous écrivons, pour $I,\ J$ tels que $i_n = j_n$ par exemple :

$$\int\limits_{\mathcal{C}^0} |\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| \lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))} \prod_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(\sigma_{i_p})^2} \int\limits_{\rho_j<\sigma_j} \prod_{p=1}^{n-1}\rho_{i_p}\,\mathrm{d}\rho_{i_p}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho_{i_n}}{\rho_{i_1}+\rho_{i_n}}$$
$$\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))}\cdot\frac{1}{\sigma_{i_1}} \int\limits_{\substack{\rho_{i_1}<\sigma_{i_1}\\ \rho_{i_n}<\sigma_{i_n}}} \mathrm{d}\rho_{i_1}\frac{\mathrm{d}\rho_{i_n}}{\rho_{i_1}+\rho_{i_n}}$$
$$\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))}\cdot\frac{1}{\sigma_{i_1}} \int\limits_{\rho_{i_1}<\sigma_{i_1}} \bigl(-\ln(\rho_{i_1})\bigr)\,\mathrm{d}\rho_{i_1} \lesssim \frac{d(z)^{1/m}|\ln d(z)|}{\sigma(z,v,d(z))}. \tag{4.4}$$

(Si $i_n \neq j_n$ ou bien si $i_n = j_n$ mais $\sigma_{i_n} \leqslant \max_{1\leqslant p\leqslant n-1}\sigma_{i_p}$, nous obtenons une estimation en : $0(1)d(z)^{1/m}/\sigma(z,v,d(z))$.)

Par des calculs analogues à ceux menant à (4.3), en tenant encore compte de : $|\zeta - z| \approx |\zeta - z| + 2^\ell d(z)$ si $\zeta\in\mathcal{C}^\ell$ lorsque $\ell \geqslant 1$:

$$\int\limits_{\mathcal{C}^\ell} |\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| \lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))} \prod_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(\sigma_{i_p}(z,2^\ell d(z)))^2} \int\limits_{\mathcal{C}^\ell} \frac{\mathrm{d}\zeta}{(|\zeta-z|+2^\ell d(z))^{2+\eta}}$$
$$\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z,v,d(z))(2^\ell d(z))^\eta} \prod_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{i_p}^2} \int\limits_{\rho_j<\sigma_j=\sigma_j(z,2^\ell d(z))} \prod_{p=1}^{n-1}\rho_{i_p}\,\mathrm{d}\rho_{i_p}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho_{i_n}}{\rho_{i_1}+\rho_{i_n}}$$
$$\lesssim \frac{d(z)^{1/m-\eta'}}{2^{\ell\eta}\sigma(z,v,d(z))}.$$

Et un résultat analogue si $i_n \neq j_n$. D'où

$$I_2 \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{1/m-\eta}}{\sigma(z,v,d(z))},\quad \eta>0,\ \text{arbitrairement petit.} \tag{4.5}$$

Les calculs concernant $D_{z,v}u^{(1)}$ conduisent à la même estimation pour $|\int_{\Omega\cap\mathcal{U}} f \wedge D_{z,v}K^{(1)}|$, ce qui achève la preuve de la Proposition 9.

Références

[1] J. Bruna, P. Charpentier, Y. Dupain, Zero varieties for the Nevanlinna class in convex domains of finite type in C^n, Ann. Math. 147 (1998) 391–415.
[2] A. Cumenge, Estimées Lipschitz optimales dans les convexes de type fini, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997) 1077–1080.
[3] A. Cumenge, Sharp estimates for $\bar\partial$ on convex domains of finite type, Ark. Mat. 39 (2001) 1–25.
[4] K. Diederich, B. Fischer, J.E. Fornaess, Hölder estimates for convex domains of finite type, Math. Z. 232 (1999) 43–61.
[5] P. Greiner, E.M. Stein, Estimates for the $\bar\partial$ Neumann Problem, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1977.
[6] S. Krantz, Optimal Lipschitz and L^p regularity for the equation $\bar\partial u = f$ on strongly pseudoconvex domains, Math. Ann. 219 (1976) 233–260.
[7] S. Krantz, Function Theory of Several Complex Variables, Second edition, in: Wadsworth & Brooks/Cole Math. Ser., 1992.
[8] J.D. McNeal, Estimates on the Bergman kernel of convex domains, Adv. Math. 109 (1994) 108–139.
[9] J.D. McNeal, E.M. Stein, Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type, Duke Math. J. 73 (1994) 177–199.
[10] E.M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.